5. 微分係數，速度及び單位いろいろ 實際的應用のためには微分學の勉强だけでは不充分なので，まづ微分係數や其れに用ひる單位のことを述べよう．一般に或る瞬時，時間に就ての或る數値の微分係數は，その數値の增加率，即ち速度を表はす．若し此れの增加率が一定ならば，如何なる種類の變動でも其れを時間で割れば，速度が得られる．しかし，若し增加率が絶えず變化するのならその極微增加を極微時間で割つたものが其の瞬間の速度である．若し Q を數値，S を速度とすれば，微分學の記號を用ひて，

$$S=\frac{dQ}{dt}^{*}$$

次ぎは單位の問題で，殊に速度を表はす時間の單位を考へる．速度は極微時間中の增加率だから，用ひられる時間の單位の大きさには何の制限も無いわけである．天文學上では，時の單位として，1秒から100年まであらゆる單位が用ひられる．又，速度の單位は，それが假りに單位時間中一定として，其の數値の單位增加を生ずる速度と定義され，普通の言葉で言へば例へば毎秒5米とか，毎時 $15°$ とか，毎世紀 $20''$ とか，必要に應じて言ひ表はす．

これ等の速度の單位と，係數を定める極微數値との關係は一考する必要がある．若し或る星の赤經の增す速度が“毎世紀300^sだ”と言へば，それは，速度が其の間に變じないことを意味するのであつて，この係數即ち速度を定めるには極微時間 dt の代りに，實際上速度不變の或る時間を採るのである．星の運動については，一年間の速度は殆んど變らないのが普通だから，時間は一ケ年でも宜いのである．故に，二重の意味を有つやうな言葉が用ひられて，若し其の二つの意味の違ひが理解されてゐないと，混亂が起ることにもなる．例へば，m といふ符號は一ケ年間の星の赤經歲差の定常部分を表はすのだが，一ケ年間にこれは殆んど變らないものだから，赤經歲差の年速度も亦この符號で表はされる．しかし，符號や數値は同じでも，この二つの意味は全く違ふものであることを知らねばならない．

6. 球面三角形の各要素の相互の微分關係 天文學上の諸問題に於いては，球面三角形の3つの要素が與へられて，殘りの要素を求めるといふ場合が多い．尙，かうした問題の補遺として，3要素に小さい變動や誤差がある場合，他の要素に其れ等が如何に影響するかといふ問題があるが，こんな場合には，この3要素をそれぞれ獨立した變數と見なして他の要素の微分係數を求めるのである．

三角形の6要素の間には，只3つの獨立した關係がある．この關係を數學式に表はし，その2要素を消去して，殘りの4要素間の一つの關係を作り，これ

* ニウカムの原著には，之を又 D_tQ といふ書き方で表はしてゐるが，不要と思ふから玆には省く．

により1要素を他の3要素によつて決定する．今，その式を一般に

$$\phi(x, y, z, u) = 0 \tag{9}$$

とし，これを微分して，

$$\frac{d\phi}{dx}dx + \frac{d\phi}{dy}dy + \frac{d\phi}{dz}dz + \frac{d\phi}{du}du = 0 \tag{10}$$

この式から，任意の微分係數を他の3つによつて表はすことが出來る．例へば

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\dfrac{d\phi}{dy}}{\dfrac{d\phi}{dx}}$$

6要素の中から4つを取り出す方法は15種あるから，つまり15種の式を吾々は書き得るわけであるが，しかし其のうち3つだけが相互に獨立してゐるのであるし，又，その3つの式も，實は只1つの式から，要素の並べ換へによつて得られるのである．即ち，まづ基本の式を書くと，

$$\phi = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C - \cos c = 0$$

これから，

$$\frac{d\phi}{da} = -\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C = -\sin c \cos B \tag{11}$$

$$\frac{d\phi}{db} = -\cos a \sin b + \sin a \cos b \cos C = -\sin c \cos A \tag{12}$$

$$\frac{d\phi}{dc} = \sin c \tag{13}$$

$$\frac{d\phi}{dC} = -\sin a \sin b \sin C \tag{14}$$

故に，4つの微分 (da, db, dc, dC) の相互の間の關係は

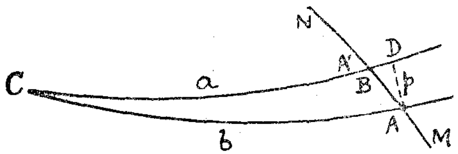
$$\sin a \cos B\, da + \sin c \cos A\, db - \sin c\, dc + \sin a \sin b \sin C\, dC = 0 \tag{15}$$

この式に於いて，文字をA, B, C, $A\cdots$ 及び a, b, c, $a\cdots$ の順に變へると，他の同樣な2つの式が得られる．それ等の實用的な式は本書の第一附錄にある．

7. 微分球面三角法 球面三角形の各要素や，球面上の種々の角度や圓弧の微分 (differential) を用ひると幾何學的な便利が多い．下に其の基本定理を掲げる．

(i) 極微球面三角形 (infinitesimal spherical triangle) は，その極微量の3乘以上を無視すれば，平面三角形として取り扱つても宜い．これは，球面剩餘（即ち3つの内角の和から180°を引き去つた剩餘）が第2次量で，此の三角形の面積に比例することに因る．又，その三角形の位置に於て切觸平面に投影した三角形の要素の微分係數が第2次量であることにも因る．尤も此の定理では，3つの角が有限である場合に限るのであつて，1つでも角が極微である場合には用ゐられぬ．そんな時には次ぎの定理を用ひる．

(ii) 2つの大圓が C 點で交はり，1つの極微角 α を挾む場合には，その C から a だけ距つてゐる點での距離 p は $p=a \sin \alpha$ である．何となれば，$AD \equiv p$ を圓弧 CA に直角と考へれば，$\sin p=\sin a \sin \alpha$ であるから，若し α と p とを極微量とすれば，上述の式となる．



第 1 圖

(iii) 弧 CA と弧 MN とが點 A で交はる場合，若し CA が點 C に於いて極微角 α だけ回轉して，CA' になつたとすれば，點 A に於ける角度の變化は

$$\Delta A = A' - A = \alpha \cos CA$$

である．球面三角形の普通の式を此の場合に應用するため，角 A' に隣る內角を B とすれば，

$$A' - A = 180^\circ - (A+B)$$

故に

$$\sin(A'-A) = \sin(A+B)$$

基本の公式より

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c = \cos b \sin C$$

角 c と角 C とが極微であるならば

$$\sin(A+B) = \cos b \sin C = \sin a \cos b$$

この場合，角 C は α となり，b は CA となる．故に，C が極微角ならば，上述の式を得るわけである．

第 2 章　差と挿入法と展開法と

8. 多くの天文表や暦表では，或る數値は，時間や引數の等間隔毎に（例へば，毎日の正午とか，毎年の初めとか，一象限中の毎度毎分角とか言つたやうに）記載されてある．それで，若し此の間隔の中程の時刻や引數に相當する數値を求めるには“挿入法”が必要となる．これには，表示されてある數値の變化法則が複雜であるか否かによつて，種々の方法がある．

まづ心得べきは，或る數量の變化の割り合ひとは，時間に對する微分係數のことである．卽ち，變化率を一定不變と假定して，單位時間中に見える其の數量の變化を言ふのである．この單位時間とは，1秒とか，1分とか，1時間とか，1日とか，1年とか，1世紀とかを言ひ，その變化率を單に變化と呼ぶ．

挿入法の最も簡單な場合は，次ぎの2つである．

第一．變化が一定である場合．これは說明を要しないほど簡單な場合で，挿入計算を行ふには，單に經過した時間を變化に乘じて，それを表の中の數値に加へれば宜いのである．但し，こゝで計算に用ひる時間の單位は變化を規定し

てゐる單位と同じであることを注意すべきである.

第二. 變化それ自體が時間に比例して變る場合. これは微積分算法によつて行ふ. 即ち, 若し, u を與へられた數値とし, a と b とを常數とし,

$$\frac{du}{dt} = a + bt$$

と假定すれば, 積分して,

$$\left.\begin{aligned} u &= u_\circ + at + \tfrac{1}{2}bt^2 \\ u &= u_\circ + (a + \tfrac{1}{2}bt)\,t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

又は（第2式）

但し, $u_\circ$ は初めの時の數値である. この第2の式が最も便利であるが, 之は次ぎの如く得られる. 假定により,

$t = o$ の時には	變化	$= a$
$t = t$ 〃	〃	$= a + bt$

即ち, 式(1)に表はれた變化は, この2つの變化の和の半分, 即ち此の挿入算の時間の中程に相當する數値である.

一例として, 1908年六月13日のグリニチ時刻に於いて, 相連續する2時間の月の赤經を天文曆書から採ると,

1 時	赤經	$16^h\,27^m\,35^s.43$	毎分時の變化	$2^s.4280$
2 〃	〃	16 30 1.31	〃	2.4347

こゝで, 1時36分に相當する赤經を挿入算で求めるのには, まづ, 此の赤經は絶えず增しつゝあるのだから, 若しも1時の時の變化を用ひれば, 差は小さ過ぎ, 又, 挿入の時刻即ち1時36分の時の變化を用ひれば, 差は大き過ぎることとなる. 故に, この中途の時刻, 即ち1時18分(又は $1^{時}.3$)の時の變化を用ひることにする. それは簡單な挿入算であつて,

$$2^s.4280 + 0^s.0067 \times 0.3 = 2^s.4300$$

この毎分時の變化率に, 經過時間, 即ち36分を乘じて,

$$16^h\,27^m\,35^s.43 + 1^m\,27^s.48 = 16^h\,29^m\,2^s.91$$

多くの數表や曆表では, 微分係數や, 單位時間の變化を記載せずに, 並列する2つの數の差(即ち, 次ぎの數を減ずれば得られるもの)が記載してある. 若し此のやうな差を, 月の曆表中の赤經から採るとすれば, その差は毎時間極めて均齊に變じ, 尙, これ等の差は“毎時30分”の時の毎時變化を表はしてゐることが明瞭であるから, 挿入の時刻に相當する變化は, その前後の半時間の變化から挿入算によつて求められる. （つづく）